MATRİSLER VE MATRİS UZAYLARI

Matris Nedir?

Güncel yaşamımızda tablolar veya çizelgeler kullanırız. Örneğin; satranç tahtası, ders çizelgesi, yıllık takvim sportoto veya sayısal loto kuponu gibi. Tablonun satır ve sütunları vardır. Tablo üzerinde bulunan nesne (veya elemanın) adresini (yerini) belirlemek için bu nesnenin hangi satır ve sütunun kesişiminde bulunduğu belirlenmelidir. Bu ve benzeri tablolara matematikte matris adı verilir. Bu ders kapsamında matrisin elemanları genelde sabit sayılardan ve değişkenlerden oluşacaktır. O halde matris kısaca bir sayı tablosudur. Fakat bu tabloda sayılar belli bir anlam ifade edebilecek şekilde yer alırlar.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenler

a_{ij} ve b_i ler katsayılar olmak üzere

n-bilinmeyenli ve m-tane denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad , \; 1 \leq i \leq m \text{ ile verilir.}$$

Bu sistem açık yazılırsa,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

olur.

Bu sistemdeki her denkleme bir lineer denklem adı verilir. Burada bilinmeyenler ve işaretler silinirse

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

sayı tabloları elde edilir. Bu sayı tablolarının herbirine matris adı verilir. Sayıların tabloda belli bir kurala göre yer aldığını vurgulamak için tanımda lineer denklem sistemi kullanılmıştır. Örneğin a_{11} sayısı sistemin 1. denkleminin, 1. bilinmeyeninin katsayısıdır.

<u>Tanım</u>: $m, n \in \mathbb{N}^+$ $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ ve K cisim

$f : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \to K$

$(i, j) \to f(i, j) = a_{ij}$ fonksiyonu yardımıyla

tanımlanan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sayı tablosuna matris denir. Bu matrisi

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

ile gösteririz. $a_{ij} \in K$ skalarlarına matrisin elemanları veya bileşenleri denir. $m \times n$ ye matrisin tipi yada mertebesi denir. a_{ij} yatay dizilişlerinin herbirine matrisin satırları, düşey dizilişlerinin herbirine de sütunları adı verilir.

Tanım: Bir tek satırdan oluşan matrise satır matrisi, bir tek sütundan oluşan matrise sütun matrisi denir.

Her sıralı n-li istenildiğinde bir satır matrisi veya bir sütun matrisi olarak yazılabilir. Yani

$X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ için

$X=[x_1\ x_2 \dots x_n]_{1\times n}$ veya $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ yazılabilir.

Matris Cümlesi

$\mathcal{F}$ cismi üzerinde tanımlanan bütün $m\times n$ tipindeki matrislerin cümlesi $\mathcal{F}^m_n$ veya $\mathcal{F}^m{}_n$ ile gösterilir

$$\mathcal{F}^m_n = \{ A=[a_{ij}] \mid \underset{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}{a_{ij} \in \mathcal{F}} \}$$

Örnek! $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \in \mathbb{R}^2_2$, $B=\begin{bmatrix} 1+i \\ 2-5i \end{bmatrix}_{2\times 1} \in \mathbb{C}^2_1$

(Reel matris) (kompleks matris)

İki Matrisin Eşitliği

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n} \in \mathcal{F}^m_n$ için

$A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$, $\forall ij$ için

Sıfır Matrisi

$A=[a_{ij}] \in \mathcal{F}^m_n$ matrisinde $\forall a_{ij}=0 \in \mathcal{F}$ ise A ya sıfır matrisi denir, ve 0 ile gösterilir.

İki Matrisin Toplamı

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n} \in \mathcal{F}^m_n$ için A ile B'nin toplamı

$$A+B=\underbrace{[a_{ij}]}_{\in\mathcal{F}}+\underbrace{[b_{ij}]}_{\in\mathcal{F}}=[\underbrace{a_{ij}+b_{ij}}_{\in\mathcal{F}}]=[c_{ij}]\in\mathcal{F}^m_n$$

$+: \mathcal{F}^m_n \times \mathcal{F}^m_n \longrightarrow \mathcal{F}^m_n$ iç işlemdir.

Özellikleri:

1) $\forall A,B,C \in \mathcal{F}^m_n$ için $A+(B+C)=(A+B)+C$ yani toplama işlemi birleşimlidir.

2) $\forall A \in \mathcal{F}^m_n$ için $A+0=0+A=A$ olacak şekilde 0 matrisi birim (etkisiz) elemanıdır.

3) $\forall A \in \mathcal{F}^m_n$ için $A+(-A)=(-A)+A=0$ olacak şekilde $-A=[-a_{ij}]\in\mathcal{F}^m_n$, A nın tersidir.

4) $\forall A,B \in \mathcal{F}^m_n$ için $A+B=B+A$ dır. Değişme öz.

Sonuç: $(\mathcal{F}^m_n, +)$ Abel gruptur.

Bir skaler ile bir Matrisin Çarpımı

$\forall \lambda \in \mathcal{F}$, $A=[a_{ij}]_{m\times n}\in\mathcal{F}^m_n$ için λ ile A nın çarpımı

$$\lambda A=\lambda[a_{ij}]=[\underbrace{\lambda a_{ij}}_{\in\mathcal{F}}]=[\underbrace{b_{ij}}_{\in\mathcal{F}}]\in\mathcal{F}^m_n$$

dir. O halde

$\cdot: \mathcal{F}\times\mathcal{F}^m_n \longrightarrow \mathcal{F}^m_n$ dış işlemdir.

Özellikleri

1) $\forall \lambda \in \mathcal{F}$, $\forall A, B \in \mathcal{F}^m_n$ için $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ dir.
dış işlem matris toplamı üz. dağılımlıdır.

2) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{F}$, $\forall A \in \mathcal{F}^m_n$ için $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$
dış işlem cisimdeki toplama işlemi üzerine dağılımlıdır.

3) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{F}$, $\forall A \in \mathcal{F}^m_n$ için $(\lambda_1 \lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A)$
dış işlem birleşimlidir.

4) $\forall A \in \mathcal{F}^m_n$ için $1.A = A$ dır.

Sonuç: $\mathcal{F}^m_n$ matris cümlesi bir vektör uzayıdır.
Bu uzaya $m \times n$ tipindeki matrislerin uzayı denir.
O halde her matris bir vektördür.

Örnek: $\mathbb{R}^2_2$, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde vektör uzayıdır. Bu uzayın boyutunu ve bir bazını bulunuz

Çözüm: Bir vektör uzayının boyutu, uzayı geren vektörler içerisinden en fazla kaçı lineer bağımsız ise o sayıya eşittir. Bu lineer bağımsız vektörler uzayın bazını verir.

$\forall A \in \mathbb{R}^2_2$ alalım.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E1} + a_{12} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E2} + a_{21} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E3} + a_{22} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_4}$$

$\mathbb{R}^2_2 = Sp\{E1, E2, E3, E4\}$ olur.

$\{E1, E2, E3, E4\}$ lineer bağımsızdır!

Scanned by CamScanner

Gerçekten

$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 = 0$ olsun. $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

O halde $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, $\mathbb{R}_2^2$ yi geriyor ve lineer bağımsız olduğundan $\mathbb{R}_2^2$ için bir bazdır.

boy $\mathbb{R}_2^2 = 4$ olur.

Örnek: $\mathbb{C}_2^2$, $\mathbb{C}$ üzerinde vektör uzayıdır. Bu uzayın boyutunu ve bir bazını bulunuz.

Çözüm: $\forall A \in \mathbb{C}_2^2$ alalım.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \underbrace{\begin{bmatrix} \overset{1+0i}{1} & \overset{0+0i}{0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_1} + a_{12} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_2} + a_{21} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_3} + a_{22} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_4}$$

$\mathbb{C}_2^2 = Sp\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$

$\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ lineer bağımsızdır.

$\Rightarrow \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, $\mathbb{C}_2^2$ için bazdır. boy $\mathbb{C}_2^2 = 4$ dir.

NOT: $\mathbb{C}_n^m$, $\mathbb{C}$ üzerinde vektör uzayı olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\mathbb{C}_n^m$, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde de vektör uzayıdır.

Dış İşlem:

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^m_n$ için λ ile A'nın çarpımı

$$\lambda \odot A = \lambda A = \lambda [a_{ij}] = [\underbrace{\lambda a_{ij}}_{\in \mathbb{C}}] \in \mathbb{C}^m_n$$

$$(\lambda z = \lambda(a+ib) = \lambda a + i \lambda b)$$

$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m_n \longrightarrow \mathbb{C}^m_n$ dış işlemi vektör uzayı aksiyomlarını sağlar. $\mathbb{C}^m_n$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

Bu uzayın da bazından ve boyutundan bahsedilebilir.

Örnek: $\mathbb{C}^2_2$, $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayıdır. Bu uzayın bazını ve boyutunu bulunuz.

Çözüm: $\forall A \in \mathbb{C}^2_2$ alalım.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 & a_2 + ib_2 \\ a_3 + ib_3 & a_4 + ib_4 \end{bmatrix}$$

$$= a_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_1} + b_1 \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}}_{E_8}$$

$$\mathbb{C}^2_2 = Sp\{E_1, E_2, \ldots, E_8\}$$

$\{E_1, E_2, \ldots, E_8\}$ lineer bağımsızdır.

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_8 E_8 = 0 \quad , \lambda_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 + i\lambda_2 & \lambda_3 + i\lambda_4 \\ \lambda_5 + i\lambda_6 & \lambda_7 + i\lambda_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0i & 0+0i \\ 0+0i & 0+0i \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 + i\lambda_2 = 0 + 0i \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i \Rightarrow \text{boy}\, \mathbb{C}^2_2 = 8 \text{ dir.}$$